Богданова Н.

35б

Математическая олимпиада школьников

Школьный тур

11 класс

1. Найдите количество четырехзначных чисел, у которых первая цифра в два раза больше последней.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=5, \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений:

3. На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/час, второго – 40 км/час, третьего – 30 км/час, четвертого – 20 км/час, пятого – 10 км/час. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21-м?

4. В треугольнике *ABC* проведена высота *BD* (точка *D* лежит на стороне *AC*). Оказалось, что, *AB*=2*CD* и *CB*=2*AD*. Найдите углы треугольника *ABC*.

5. Три товарища играют друг с другом в настольный теннис по следующему правилу: проигравший отдыхает в следующей партии. Оказалось, что один из них сыграл 21 партию, другой – 10 партий. А сколько партий сыграл третий из них? (Объясните свой ответ).

5.5

I друг выиграл 21-1=20 партий $\Leftrightarrow$ II и III вместе проиграли ему 20 раз

II друг выиграл 10-1=9 партий $\Leftrightarrow$ I и III вместе проиграли ему 9 раз

$$\begin{cases} p_2+p_3=20 \\ p_1+p_3=9 \end{cases} \quad \begin{cases} p_3=20-p_2 \\ p_3=9-p_1 \end{cases}$$

$20-p_2=9-p_1$

$-p_2+p_1=9-20 \quad p_1-p_2=-11 \quad p_2-p_1=11$

7б

№1

$$\begin{array}{c} 2\overset{II}{.}\overset{III}{.}1 \\ 4\,.\,.\,2 \\ 6\,.\,.\,3 \\ 8\,.\,.\,4 \\ \hline \Downarrow \\ 4\text{ типа} \end{array}$$

II – 10 вариантов
III – 10 вариантов | => $10 \cdot 10 = 100$ вариантов для каждого типа числа.

$100 \cdot 4 = 400$ вариантов таких чисел всего

7б

Ответ: 400 вариантов

№2

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \quad | \cdot (-1) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \\ -\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -4 \quad + \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5 \end{cases}$$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 7$

$\frac{2}{x} = \frac{7}{1}$

$x = \frac{2}{7}$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \end{cases}$$

$\frac{7}{2} + \frac{1}{y} = 6$

$\frac{1}{y} = 6 - 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y} = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$y = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5 \end{cases}$$

$\frac{1}{z} + \frac{7}{2} = 5$

$\frac{1}{z} = 5 - 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{z} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$z = \frac{2}{3}$

7б

Ответ: $x = \frac{2}{7}$; $y = \frac{2}{5}$; $z = \frac{2}{3}$.

№3

На первых 50 км 1-й велосипедист (I) обгоняет остальных (II, III, IV, V) так: $\underset{20}{(\overset{1}{V})}\underset{20}{(\overset{2}{V}\overset{3}{IV})}\underset{30}{(\overset{4}{V}\overset{5}{III})}\underset{40}{(\overset{6}{V}\overset{7}{II}\overset{8}{IV})}\underset{50}{(\overset{9}{V})}$ – всего 9 обгонов.

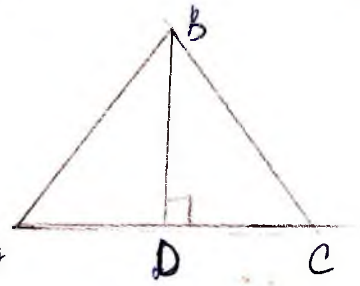
На следующих 50 км: $\underset{60}{(\overset{10}{V}\overset{11}{IV}\overset{12}{III})}\underset{70}{(\overset{13}{V})}\underset{80}{(\overset{14}{V}\overset{15}{IV}\overset{16}{II})}\underset{90}{(\overset{17}{V}\overset{18}{III})}\underset{100}{(\overset{19}{V}\overset{20}{IV})}$ – всего 11 обгонов, а на 100 км в целом – 20.

На 110-м км I обгоняет только V – это 21-й обгон.

7б

Ответ: 5-й велосипедист.

№4



Дано: $\triangle ABC$
BD – высота
$AB = 2CD$
$CB = 2AD$

Найти: $\angle A, \angle B, \angle C$

Решение:

Из $\triangle BAD$ с $\angle D = 90°$ $BD^2 = AB^2 - AD^2 = (2CD)^2 - AD^2 = 4CD^2 - AD^2$

Из $\triangle BDC$ с $\angle D = 90°$ $BD^2 = BC^2 - DC^2 = (2AD)^2 - CD^2 = 4AD^2 - CD^2$

$4CD^2 - AD^2 = 4AD^2 - CD^2$

$4CD^2 + CD^2 = 4AD^2 + AD^2$

$5CD^2 = 5AD^2 \quad |:5$

$CD^2 = AD^2$

$CD = AD$, BD – высота |=> $\triangle ABC$ – равнобедр.

→ $AB = 2CD$
$CB = 2AD = 2CD$
$AC = AD + CD = CD + CD = 2CD$ | => $AB = CB = AC$

$AB = CB = AC$ |=> $\triangle ABC$ – равносторонний

=> $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

7б

Ответ: 60°, 60°, 60°